13-4-06

Tentamen Vector analyse 2006

Zet op alle vellen je naam en #. Maak 1 sommen op verschillende vellen. $\text{Cijfer} = 1 + \frac{\#}{2}$.

1) Laat $F = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ een vector veld op $\mathbb{R}^3$

en $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ een lus beschreven door

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ e^{-\sin t + (\cos t)^2} \\ \sin t \end{pmatrix}$$

De lus $c_0 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$c_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$$

a) (4) Laat zien dat $\int_c F \cdot ds = \int_{c_0} F \cdot ds$.

b) (2) Bereken $\int_c F \cdot ds$

Hint: Merk op dat c en c_0 op de cilinder $x^2 + z^2 = 1$ liggen.

Z.O.Z.

II] (3) Laat $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ diff. en

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \ , \ x \in [a,b]\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_2(x) \leq y \leq \varphi_3(x) \ , \ x \in [a,b]\} .$$

F is een diff. vectorveld op $\mathbb{R}^2$.

<u>Bewijs:</u> $\displaystyle\int_{\partial D} F \cdot ds = \int_{\partial D_1} F \cdot ds + \int_{\partial D_2} F \cdot ds .$

III] Laat $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ met

(3) $\quad f(x,y,z) = x^3 y - z$

Bepaal een vergelijking voor het raakvlak aan $f = 0$ in het punt $(1,1,1)$

IV] Laat $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{en}$$
$$g(x,y) = x + y - (x-y)^2 + 1/2$$

a) (3) Bepaal alle kandidaten voor extrema van f op $g = 0$

b) (3) Bepaal het type van de kandidaten uit a.

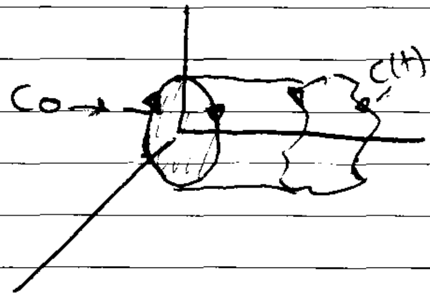
Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent:

4	0	II
3	3	
2	2	
1	6	

16

$$F = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

a)



$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

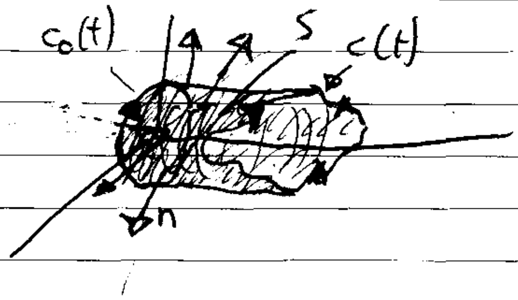
de curl(F) "werkt in de y-richting".

er is een bepaald oppervlak S, ~~daar~~ tussen C_0 en $C(t)$ in:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos t \\ y \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{met } t \in [0, 2\pi] \text{ en } 0 \leq y \leq e^{-\sin t + (\cos t)^2}$$

0

plaatje:



~~omdat~~ de randen van oppervlak S zijn ~~geparametr.~~ geparametriseerd door:

3 $-C_0(t)$ en $C(t)$ $\quad t \in [0, 2\pi)$

⊖ vanwege de oriëntatie

Stokes: $\displaystyle\int_S \nabla \times F \, dS = \int_{\partial S} F \, ds$

$\displaystyle\int_S \nabla \times F \, dS = 0$, want $\nabla \times F = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $n = (+/-) \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

de normaal van S wijst loodrecht naar buiten in het x-z vlak. De normaal van S (in het xz-vlak) staat loodrecht op curl(F) (deze wijst in de -y-richting).

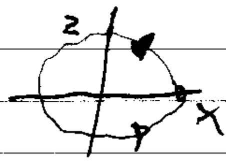
-1 Dus: $\int_S \nabla \times F \, dS = 0 = \int_{\partial S} F\, ds = \underbrace{\int_C F\, ds - \int_{C_0} F \cdot ds}_{\text{dit moet je beter uitleggen}}$

$\int_C F\, ds - \int_{C_0} F\, ds = 0 \Rightarrow \int_C F\, ds = \int_{C_0} F\, ds$ (*)

Dus $\int_C F\, ds = \int_{C_0} F \cdot ds$

$c_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$

8 b) $\int_C F\, ds = \int_{C_0} F \cdot ds$ $\quad c_0 : [0, 2\pi]$



$c_0'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad F(c(t)) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix}$

$\int_0^{2\pi} F(c(t)) \cdot c'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, dt$

2 $= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$

$\int_C F \cdot ds = 2\pi$ $\qquad$ dus: $\int_C F \cdot ds = 2\pi$

(*) je moet opmerken dat je C in negatieve zin doorloopt (niet eens C_0, mag wel)

en gebruiken: $\int_{C_0^-} F\, ds = - \int_{C_0} F\, ds$

Postcode en

Woonplaats:

Jaar van eerste inschrijving:

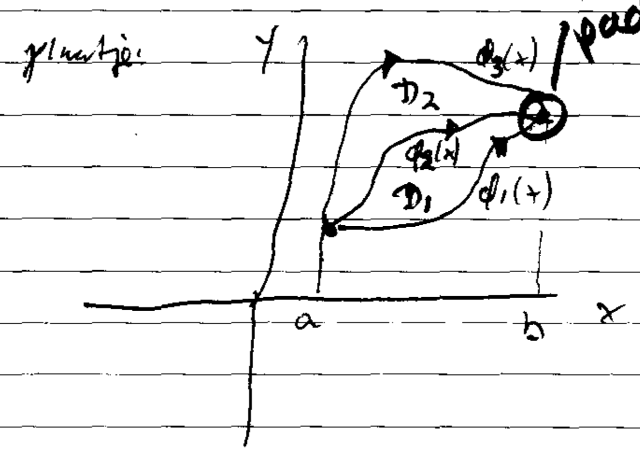
Datum:

Naam docent:

waarom zouden paden hier aansluiten? -1

II

plaatje:



$$\partial D_1 = \varphi_1 - \varphi_2$$
$$\partial D_2 = \varphi_2 - \varphi_3$$
$$\partial D = \varphi_1 - \varphi_3$$

$$D_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),\ x \in [a,b] \}$$

$$D_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_2(x) \leq y \leq \varphi_3(x),\ x \in [a,b] \}$$

$$\int_{\partial D_1} F \cdot ds = \int_a^b F(x, \varphi_1(x)) \cdot \varphi_1'(x)\, dx + \int_b^a F(x, \varphi_2(x)) \cdot \varphi_2'(x)\, dx$$

$$= \int_a^b F(x, \varphi_1(x)) \cdot \varphi_1'(x)\, dx - \int_a^b F(x, \varphi_2(x)) \cdot \varphi_2'\, dx$$

(2)

$$\int_{\partial D_2} F \cdot ds = \int_a^b F(x, \varphi_2(x)) \cdot \varphi_2'(x)\, dx - \int_a^b F(x, \varphi_3(x)) \cdot \varphi_3'(x)\, dx$$

$$\int_{\partial D} F \cdot ds = \int_a^b F(x, \varphi_1(x)) \cdot \varphi_1'(x)\, dx - \int_a^b F(x, \varphi_3(x)) \cdot \varphi_3'(x)\, dx$$

~~$\int_{\partial D} F \cdot ds$ is het pad integraal van [a,b] van $\varphi_1(x)$~~

$$\int_{\partial D_1} F \cdot ds + \int_{\partial D_2} F \cdot ds = \int_a^b F(x, \varphi_1(x))\, \varphi_1'(x)\, dx - \int_a^b F(x, \varphi_2(x)) \cdot \varphi_2'(x)\, dx + \int_a^b F(x, \varphi_2(x)) \cdot \varphi_2'(x)\, dx - \int_a^b F(x, \varphi_3(x)) \cdot \varphi_3'(x)\, dx$$

$$= \int_a^b F(x, \varphi_1(x))\, \varphi_1'(x)\, dx + \int_a^b F(x, \varphi_3(x)) \cdot \varphi_3'(x)\, dx$$

$$= \int_{\partial D} F\, ds$$

* hopelijk klopt mijn notatie een beetje.

dus: $\int_{\partial D} F \cdot ds = \int_{\partial D_1} F ds + \int_{\partial D_2} F \cdot ds$

Dit volgt ook direct uit Stokes,

$$\int_{\partial D} F\, ds = \int_D \nabla \times F\, dS = \int_{D_1} \nabla \times F\, dS + \int_{D_2} \nabla \times F\, dS$$

$$= \int_{\partial D_1} F \cdot ds + \int_{\partial D} F \cdot ds$$

dus: $\int_{\partial D} F\, ds = \int_{\partial D_1} F \cdot ds + \int_{\partial D_2} F \cdot ds$

III

$f(x,y,z) = x^3 y - z$

raakvlak: $(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) \cdot n = 0$

3

$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 y \\ x^3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$

~~dus:~~ $\cancel{(x-1,\ y-1,\ z-1) \cdot \nabla f = 0}$

$\cancel{\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3x^3 y \\ x^3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0}$

$\cancel{3x^3 y - 3x^2 y + yx^3 - x^3 - z + 1 = 0}$

$\cancel{4yx^3 - x^3 - 3x^2 y - z + 1 = 0}$

~~vergelijking voor het raakvlak luidt:~~

$\cancel{4yx^3 - x^3 - 3x^2 y - z + 1 = 0}$

$\nabla f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \|\nabla f\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$

$n = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}}$

dus: $\frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$\frac{1}{\sqrt{11}} (3x - 3 + y - 1 - z + 1) = 0$

$\frac{3}{\sqrt{11}} x + \frac{1}{\sqrt{11}} y - \frac{z}{\sqrt{11}} - \frac{3}{\sqrt{11}} = 0$

$\underline{3x + y - z - 3 = 0} \Rightarrow$ Vergelijking voor het raakvlak in $(1,1,1)$

Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent:

IV

a $f(x,y) = x^2+y^2$

$g(x,y) = x+y-(x-y)^2+1/2$

$\nabla f = \lambda \nabla g$, $g=0$: $\begin{cases} 2x = \lambda(1-2(x-y)) \\ 2y = \lambda(1+2(x-y)) \\ x+y-(x-y)^2+1/2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x = \lambda(1-2(x-y)) \\ 2y-2x = \lambda + 2\lambda(x-y) - \lambda + 2\lambda(x-y) = 4\lambda(x-y) \\ x+y-(x-y)^2+1/2=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x = \lambda(1-2(x-y)) \\ y-x = 2\lambda(x-y) \\ x+y-(x-y)^2+1/2=0 \end{cases}$

uit derde vgln. volgt: $x \neq 0$ of $y \neq 0$

uit de tweede vgln volgt daardoor: $\lambda = -1/2$ of $x=y$

$x=y$

$\begin{cases} 2x = \lambda(1-2(x-y)) \\ x=y \\ 2x-(x-x)^2+1/2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda = \frac{2x}{(1-2(x-y))} \\ x=y \\ x=-1/4 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda = -1/2 \\ x=-1/4 \\ y=-1/4 \end{cases}$

~~$\lambda=-1/2$~~

~~$\begin{cases} 2x = -1+2(x-y) \\ y-x = y-x \\ x+y-(x-y)^2+1/2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = -1+2x-2y \\ y-x = y-x \\ x+y-(x-y)^2+1/2=0 \end{cases}$~~

~~$\begin{cases} y=-1/2 \\ -1/2-x = -1/2-x \\ x-1/2-(x+1/2)^2+1/2=0 \end{cases}$~~

$\lambda=-1/2$ $2x = -1/2(1-2(x-y)) \Rightarrow 2x = -1/2+x-y$

$x = -1/2-y$

$y-x = y-x$

$x+y-(x-y)^2+1/2=0$

202

$\lambda = \tfrac{1}{2}$

$x = -\tfrac{1}{2} - y$

$y - x = y - x$

$-\tfrac{1}{2} - y + y - (-\tfrac{1}{2} - y - y)^2 + \tfrac{1}{2} = 0$

$\lambda = -\tfrac{1}{2}$

$\left\{\begin{array}{l} x = -\tfrac{1}{2} - y \\ y - x = y - x \\ (-\tfrac{1}{2} - 2y)^2 = 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda = -\tfrac{1}{2} \\ x = -\tfrac{1}{4} \\ y = -\tfrac{1}{4} \end{array}\right.$

de kandidaat voor f op $g = 0$ is:

$\lambda = -\tfrac{1}{2} \quad x = -\tfrac{1}{4} \quad y = -\tfrac{1}{4}$

b) $\nabla g = \begin{pmatrix} 1 - 2(x-y) \\ 1 + 2(x-y) \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 1 + 2(x-y) \\ -1 + 2(x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_y \\ -g_x \end{pmatrix}$

$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$Hg = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \lambda = -\tfrac{1}{2}$

$D = u^T (Hf - \lambda Hg)\, u$

$= (1 + 2(x-y), -1 + 2(x-y)) \begin{pmatrix} 2+2\lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 2+2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + 2(x-y) \\ -1 + 2(x-y) \end{pmatrix}$

Voor $\lambda = -\tfrac{1}{2}$ $x = -\tfrac{1}{4}$ en $y = -\tfrac{1}{4}$ volgt:

$D = (1 + 0, -1 + 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= (0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

omdat $D = 0$, wordt je hier niet echt veel wijzer van.

Dus door de methode met Hessianen en dergelijk toe te passen wordt je niet erg veel wijzer.

Als je echter kijkt naar wat voor punten voldoen aan $g(x,y) = 0$ en een beetje inzicht toepast

kun je zien dat de kandidaat ...

Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent:

vervolg:

IV

b) $x+y-(x-y)^2+\frac{1}{2}=0$

$x+y-(x^2-2xy+y^2)+\frac{1}{2}=0$

$x+y-x^2+2xy-y^2+\frac{1}{2}=0$

$y^2-(2x+1)y+(x^2-x-\frac{1}{2})=0$

abc-formule: $\dfrac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}=y$

$A=1 \quad B=-(2x+1) \quad C=(x^2-x-\frac{1}{2})$

$y=\dfrac{2x+1 \pm \sqrt{(2x+1)^2-4(x^2-x-\frac{1}{2})}}{2}$

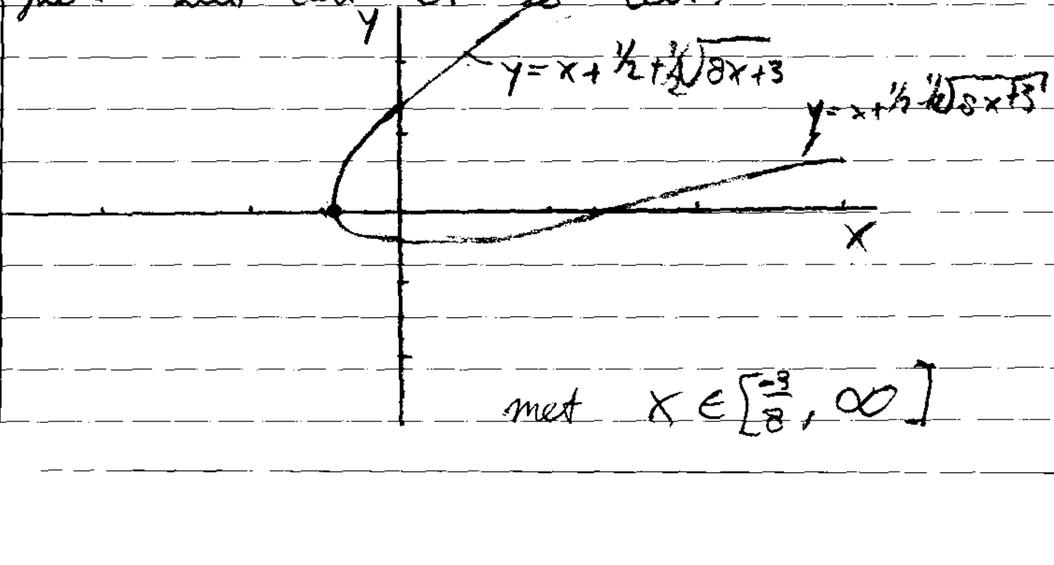
$=\dfrac{2x+1 \pm \sqrt{\cancel{4x^2}+4x+1-\cancel{4x^2}+4x+2}}{2}$

$= x+\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{8x+3}$

dus $y=x+\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{8x+3} = h(x)$

$f(x,y)=x^2+y^2$ $f(x,y)$ is dus in feite niet anders dan de afstand van het punt (x,y) tot het nulpunt $(0,0)$ h

als je de functies $y=x+\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{8x+3}$ plot ziet dit er zo uit:



met $x \in [\frac{-3}{8}, \infty]$

Door op zoek te gaan naar een kandidaat, ben je in feite op zoek gegaan naar een punt (x,y) in ${}^h f(x)$ waarbij de afstand tot $(0,0)$ minimaal of maximaal is geworden. h

Je ziet al snel dat er geen maxima van ${}^h f$ bestaan: als $x \to \infty$, dan wordt $x^2+y^2 >> 1$, $x^2+y^2 \to \infty$ de afstand van ${}^h f(x)$ tot $(0,0)$ wordt dan alsmaar groter. Er zijn dus geen maxima

Je ziet wel dat als x klein ~~wordt en f(x) nadert tot (0,0)~~ wordt, ${}^h f(x)$ ~~ergens~~ erg in de buurt ligt van $(0,0)$.
Dus: voor een kleine waarde van x, is er ergens een punt (x,y) ~~of~~ op $f(x)$ zodat x^2+y^2 een minimale waarde bereikt heeft.
Er moet dus in ieder geval één minima zijn.

Omdat ik bij IV a) slechts één kandidaat had gevonden $(-1/4, -1/4)$ voor $\lambda = -1/2$, kom ik dus tot de conclusie dat deze kandidaat een minima is. h

~~Deze kandidaat~~
$\Rightarrow$ kandidaat $(-1/4, -1/4)$ = minima